I Liceum Ogólnokształcące im Króla Kazimierza Wielkiego w Brzozowie

Modelowanie w Excelu

Brzozów 2011

Spis treści

Opis fizyczny i konstrukcja arkuszy

W rozdziale tym opisanych zostanie kilka problemów fizycznych, ich modele matematyczne, oraz przykładowe rozwiązanie przy pomocy arkusza excela.

Każdy problem w pierwszej części zostanie opisany od strony fizycznej. W dalszej części na podstawie modelu fizycznego tworzony jest numeryczny model matematyczny. Rozwiązanie matematyczne opiera się na rozwiązaniu numerycznym. Nie zaprzęgane są tutaj rozwiązania analizy matematycznej, bowiem w większości przypadków są to równania różniczkowe, których nie omawia się w szkole średniej. Ostatnia część to „przetłumaczenie" modelu matematycznego na język arkusza kalkulacyjnego.

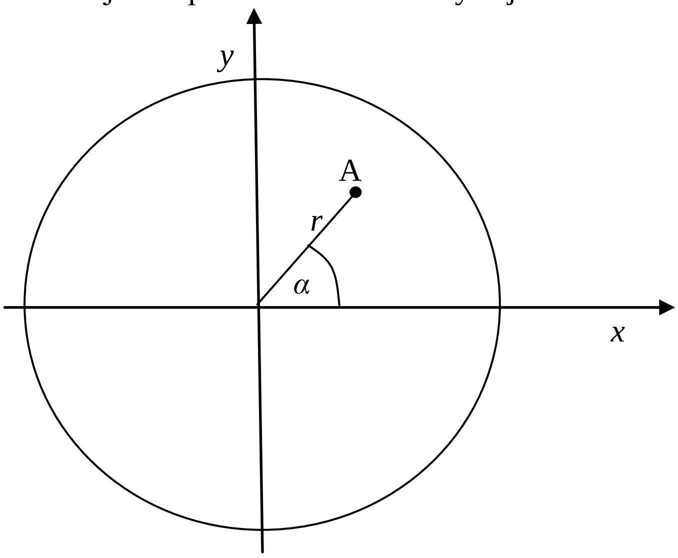
1. Składanie ruchów

a) Sformułowanie problemu

Po tarczy gramofonowej obracającej się z prędkością $33^{obr}/_{min}$ od środka wzdłuż promienia idzie biedronka z prędkością $1^{m}/_{min}$. Narysuj tor ruchu biedronki.

b) Opis fizyczny

Rozwiązanie problemu jest napisanie równania krzywej.



Rys.1 Składanie ruchów

Odpowiedzmy najpierw na pytanie:
-Jakie będzie równanie toru ruchu w sytuacji gdy biedronka stoi w odległości r od środka obrotu, a tarcza się obraca?
Torem ruchu jest okrąg. Równania parametryczne opisujące ten ruch mają postać

$$\begin{cases} x = r\cos(\omega t) \\ y = r\sin(\omega t) \end{cases} \qquad [1.1]$$

Gdzie:

t- czas (parametr równania),
r- promień obrotu.

- Jak zmienia się odległość biedronki od środka okręgu?
Jest to ruch jednostajny ze stałą prędkością v

$$r = vt \qquad [1.2]$$

Składając równania [1.1] i [1.2] otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x = vt\cos(\omega t) \\ y = vt\sin(\omega t) \end{cases} \qquad [1.3]$$

Układ [1.3] jest rozwiązaniem zadania.

c) Opis matematyczny arkusza

Oznaczenia użyte w opisie

t_o – początkowy czas obserwacji ruchu,
t_k – czas końcowy obserwacji ruchu
n – liczba komórek na których zbudujemy tablicę wartości x i y,
dt – krok czasowy,

$$dt = \frac{t_0 - t_k}{n} \qquad [1.4]$$

W chwili to współrzędna x wynosi xo , y wynosi yo,
Po czasie dt w chwili $t_1=t_0+dt$ położenie $x_1 = vt_1\cos(\omega t_1)$, $y_1 = vt_1\sin(\omega t_1)$,
Kolejny krok czasu $t_2=t_1+dt$ położenie $x_2 = vt_2\cos(\omega t_2)$, $y_2 = vt_2\sin(\omega t_2)$,
….
Po n krokach $t_n=t_{n-1}+dt$ położenie $x_n = vt_n\cos(\omega t_n)$, $y_n = vt_n\sin(\omega t_n)$,

Tak policzone, wartości położenia po naniesieniu na układ współrzędnych da nam krzywą, która będzie torem ruchu naszego ciała.

Kolejnym krokiem jest „przetłumaczenie” zapisu matematycznego do arkusza Excela.

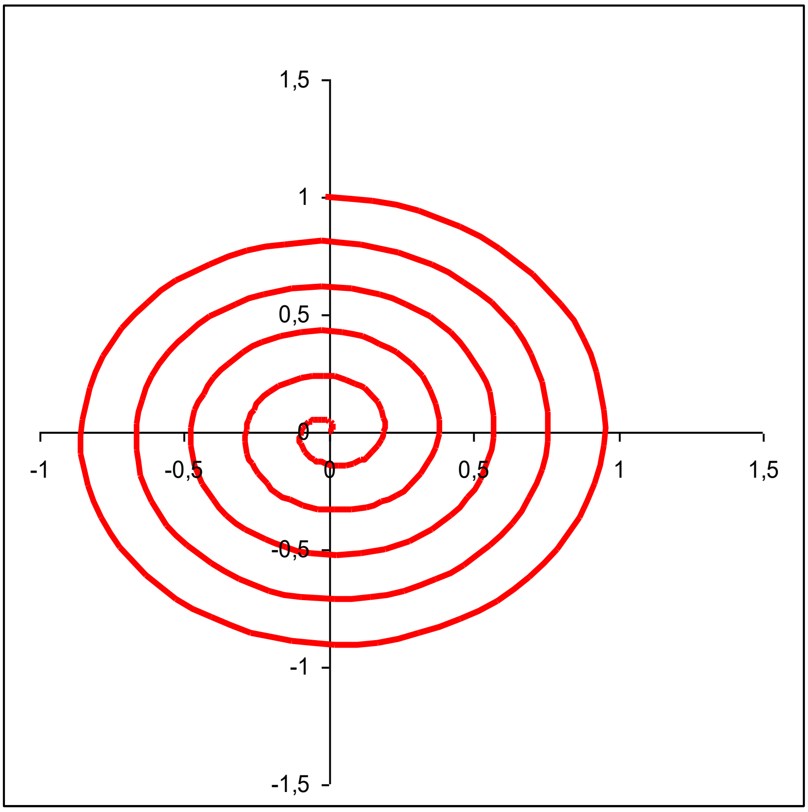
d) Konstrukcja arkusza

	A	B	C
1	**Dane**		
2	v=	1	
3	w=	33	
4	t0=	0	Obszar danych
5	tk=	1	
6	n=	200	
7	dt=	=(B5-B4)/B6	
8			
9	*T*	*X*	*Y*
10	=B4	=$B$2*A10*COS($B$3*A10)	=$B$2*A10*SIN($B$3*A10)

11	=A10+$B$7	=$B$2*A11*COS($B$3*A11)	=$B$2*A11*SIN($B$3*A11)
12	=A11+$B$7	=$B$2*A12*COS($B$3*A12)	=$B$2*A12*SIN($B$3*A12)
13	=A12+$B$7	=$B$2*A13*COS($B$3*A13)	=$B$2*A13*SIN($B$3*A13)
14	=A13+$B$7	=$B$2*A14*COS($B$3*A14)	=$B$2*A14*SIN($B$3*A14)
15	=A14+$B$7	=$B$2*A15*COS($B$3*A15)	=$B$2*A15*SIN($B$3*A15)
16	=A15+$B$7	=$B$2*A16*COS($B$3*A16)	=$B$2*A16*SIN($B$3*A16)
17	=A16+$B$7	=$B$2*A17*COS($B$3*A17)	=$B$2*A17*SIN($B$3*A17)
18	=A17+$B$7	=$B$2*A18*COS($B$3*A18)	=$B$2*A18*SIN($B$3*A18)
19	=A18+$B$7	=$B$2*A19*COS($B$3*A19)	=$B$2*A19*SIN($B$3*A19)
	Kopiowanie do wiersza 210		

Tab.1. Arkusz- składanie ruchów

Do wykresu typu XY wybieramy kolumny oznaczone x i y.



Wykr.1 –składanie ruchów

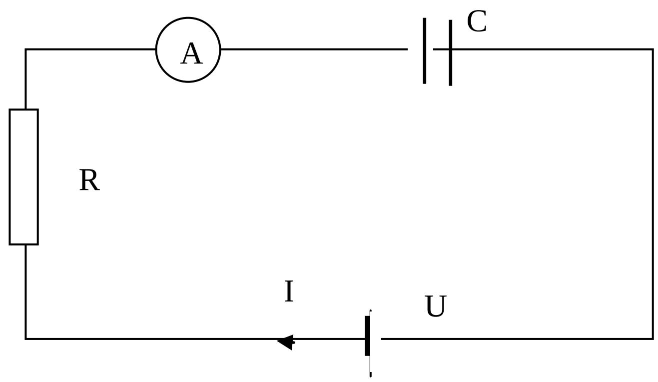
2. *Ładowanie kondensatora*

a) Sformułowanie problemu

Jak zmienia się ilość zgromadzonego ładunku na kondensatorze podczas ładowania kondensatora.

b) Opis fizyczny

By przeprowadzić badanie krzywej ładowania kondensatora należy rozpatrzeć zależność ładunku od czasu obwodu



Rys.2 Obwód do badania krzywej ładowania kondensatora

Napięcie panujące na oporze R policzymy z prawa Ohma dla odcinka Obwodu

$$U_R = IR \qquad [2.1]$$

Gdzie:

-*I* natężenie prądu płynącego w obwodzie $I = \frac{dQ}{dt}$ [2.2]

Napięcie na kondensatorze

$$U_C = \frac{Q}{C} \qquad [2.3]$$

Gdzie:

Q- ładunek zgromadzony na kondensatorze,
C- pojemność kondensatora,

II prawo Kirchhoffa dla tego obwodu ma postać

$$U_R + U_C = U \qquad [2.4]$$

Uwzględniając [2.1], [2.2], [2.3] podstawiając do [2.4] otrzymamy równanie

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} - U = 0 \, [2.5]$$

Równanie [2.5] jest równaniem różniczkowym liniowym pierwszego rzędu. Jest możliwe rozwiązanie go przy pomocy metod analizy matematycznej.

Jest to równanie które na poziomie szkoły średniej można rozwiązać przy pomocy komputera, budując model numeryczny.

c) Model numeryczny

Oznaczenia

t_o – początkowy czas obserwacji ruchu,
t_k – czas końcowy obserwacji ruchu
n – liczba komórek na których zbudujemy tablicę wartości $t,Q\ ,dQ,$
dt – krok czasowy,
Q_0 – ładunek początkowy, zgromadzony n kondensatorze w chwili t_o

$$dt = \frac{t_0 - t_k}{n}$$

Po czasie dt w chwili $t_1=t_0+dt$ na kondensatorze został zgromadzony ładunek $Q_1=Q_0+dQ_1$., a przyrost dQ_1 liczymy ze wzoru [2.5] $dQ_1 = \frac{U}{R} - \frac{Q_o}{RC}$.

Po kolejnym czasie dt w chwili $t_2=t_1+dt$ ładunek $Q_2=Q_0+dQ_2$ a przyrost . dQ_2 wynosi $dQ_2 = \frac{U}{R} - \frac{Q_1}{RC}$

Po n krokach otrzymamy tabelę wartości Q i t , które pozwolą zbudować szukany wykres zależności Q(t)

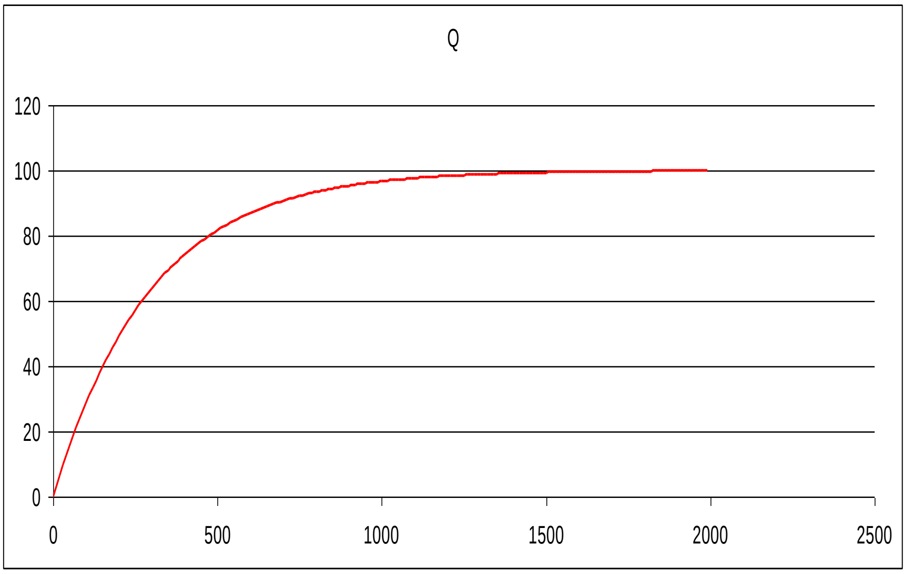
d) Konstrukcja arkusza

Przedstawioną metodę można przenieść do arkusza

	A	B	C	D
1	Dane:			
2	U=	10	U/R=	=B2/B3
3	R=	3	1/RC	=1/B3*B4
4	C=	0,1		
5	To=	0		
6	Tk=	2000		
7	n=	200		
8	Dt=	=(B6-B5)/B7		
9				
10	*T*	*dQ*	*Q*	
11	=B5		0	
12	=A11+$B$8	=$D$2-C11*$D$3	=C11+B12	
13	=A12+$B$8	=$D$2-C12*$D$3	=C12+B13	
14	=A13+$B$8	=$D$2-C13*$D$3	=C13+B14	
15	=A14+$B$8	=$D$2-C14*$D$3	=C14+B15	
16	=A15+$B$8	=$D$2-C15*$D$3	=C15+B16	

Tab. 2. Arkusz krzywa ładowania kondensatora.

Rozwiązaniem równania jest zależność ładunku od czasu Q(t)

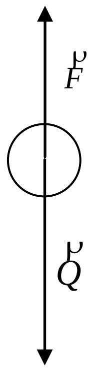


Wykr. 2. Krzywa ładowania kondensatora

3. *Ruch z siłami oporu*

Kolejnym problemem którego rozwiązanie analityczne wymaga znajomości analizy metamatematycznej, jest spadek ciała w powietrzu.

a) Opis fizyczny



Na ciało puszczone w powietrzu działają dwie siły.
Jedna – to siła ciężkości

$$\vec{Q} = m\vec{g} \quad [3.1]$$

Gdzie:

m – masa ciała
g- przyspieszenie ziemskie

Druga siła – to siła oporu. Nie jest ona stała w trakcie trwania ruchu, lecz zależy od prędkości z jaką porusza się ciało.

$$\vec{F} = -k\vec{v} \qquad [3.2]$$

Gdzie :

v- prędkość ciała

k- współczynnik zależny od kształtu poruszającego się ciała, pola przekroju czynnego, gęstości ośrodka w którym porusza się ciało.

Znając już wszystkie siły, możemy skonstruować równie ruchu

$$m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{F} \qquad [3.3]$$

Przechodząc na zapis skalarny otrzymujemy

$$ma=Q-F \qquad [3.4]$$

podstawiając wzory za Q i F

$$ma=mg-kv \qquad [3.5]$$

uwzględniając , zależność definicyjną na przyspieszenie, $a = \frac{dv}{dt}$,

otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe I –rzędu

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v - g = 0 \quad [3.6]$$

b) Model numeryczny

Oznaczenia

t_o – początkowy czas obserwacji ruchu,

t_k – czas końcowy obserwacji ruchu

n – liczba komórek na których zbudujemy tablicę wartości *t,Q,dQ,*

dt – krok czasowy,

v_0 - prędkość początkowa ciała w chwili t_o

Po czasie *dt* w chwili $t_1=t_0+dt$ prędkość wzrośnie do $v_1=v_0+dv_o$

Przyrosty prędkości *dv* będziemy liczyć, zakładając, że w odstępach czasu *dt* przyspieszenie jest stałe. Wartość tego przyspieszenie będziemy pobierać z przyspieszenia na końcu poprzedniego okresu *dt.* Jest to uproszczenie numeryczne. Dokładność naszych obliczeń będzie zależeć zatem od tego jak duży będzie odstęp czasu *dt*. Zbyt duży czas spowoduję, że wyniki będą bardzo odległe od rzeczywistych, a przyjmowanie, coraz to mniejszego *dt* prowadzić może do obliczeń nadmiarowych, czyli inaczej mówiąc, dalsze zmniejszanie *dt* nie będzie prowadziło do podniesienia dokładności wyników.

By policzyć przyrost *dv* konieczne jest policzenie przyspieszenia *a* na końcu przedziały *dt*

$a_0 = g - \frac{k}{m}v_0$.. Tak policzone a_o możemy podstawić do wzoru na dv_o

$dv_0 = a_0 dt$. Stąd znamy już wartość prędkości na końcu przedziały *dt*
$v_1=v_0+dv_o$

Po następnym odstępie czasu liczy kolejno
$a_1 = g - \frac{k}{m} v_1$, $dv_1 = a_1 dt$, $v_2 = v_1 + dv_1$.

Całość obliczeń i ich kolejność można zestawić w tabeli

V	a	dv
v_o	$a_0 = g - \frac{k}{m} v_0$	$dv_0 = a_0 dt$
$v_1 = v_0 + dv_0$	$a_1 = g - \frac{k}{m} v_1$	$dv_1 = a_1 dt$
$v_2 = v_1 + dv_1$	$a_2 = g - \frac{k}{m} v_2$	$dv_2 = a_2 dt$
…		
$v_n = v_{n-1} + dv_{n-1}$	$a_{n-1} = g - \frac{k}{m} v_{n-1}$	$dv_{n-1} = a_{n-1} dt$

Kolejność wykonywania działań przedstawia łamana.

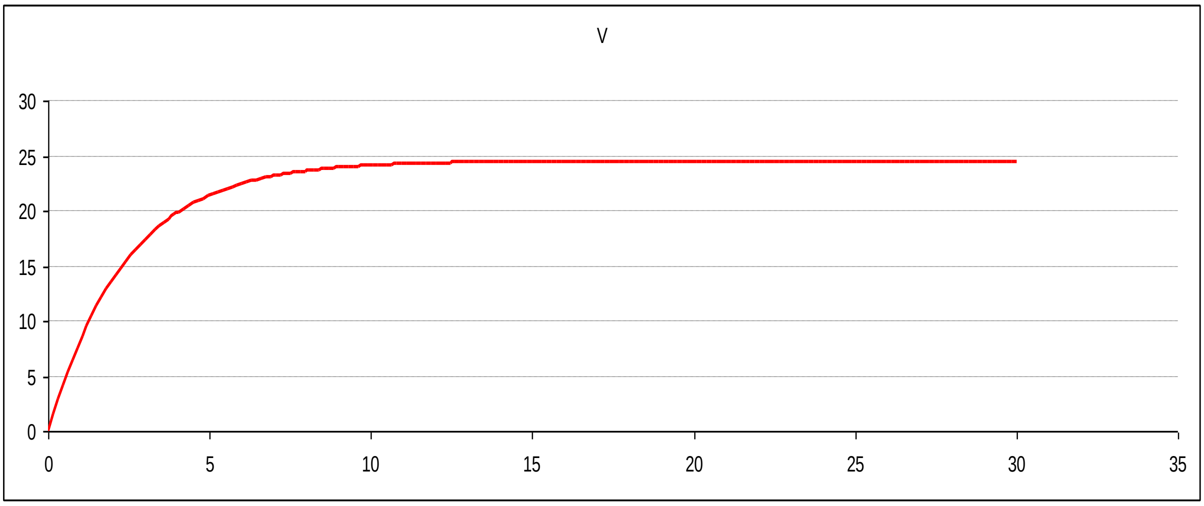
Ze sposobu wykonywania obliczeń i właściwości obliczeń numerycznych wynika, że nie jesteśmy w stanie powiedzieć jaka będzie prędkość po czasie 5**dt* jeśli nie będziemy znali wszystkich poprzednich wartości prędkości.

c) Konstrukcja arkusza

	A	B	C	D
1	Dane			
2	k=	0,4	k/m=	=B2/B3
3	m=	1		
4	g=	9,81		
5	to=	0		
6	tk=	30		
7	n=	200		
8	dt=	=(B6-B5)/B7		
9				
10				
11	t	V	a	dv
12	=B5	0	=$B$4-$D$2*B12	=C12*$B$8
13	=A12+$B$8	=B12+D12	=$B$4-$D$2*B13	=C13*$B$8
14	=A13+$B$8	=B13+D13	=$B$4-$D$2*B14	=C14*$B$8
15	=A14+$B$8	=B14+D14	=$B$4-$D$2*B15	=C15*$B$8
16	=A15+$B$8	=B15+D15	=$B$4-$D$2*B16	=C16*$B$8

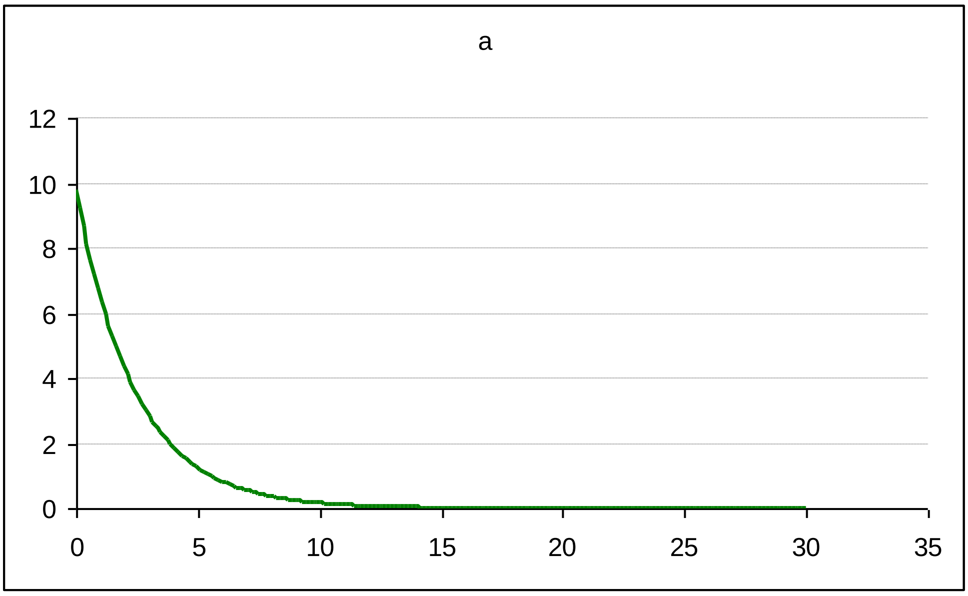
Tab. 3. Arkusz Spadek z siłami oporu.

Wykres zależności V(t) będzie miał postać



Wykr. 3. Zależność *V(t)* w ruchu z siłami oporu

Wykr. 4. Wykres zależności przyspieszenia od czasu *a(t)*



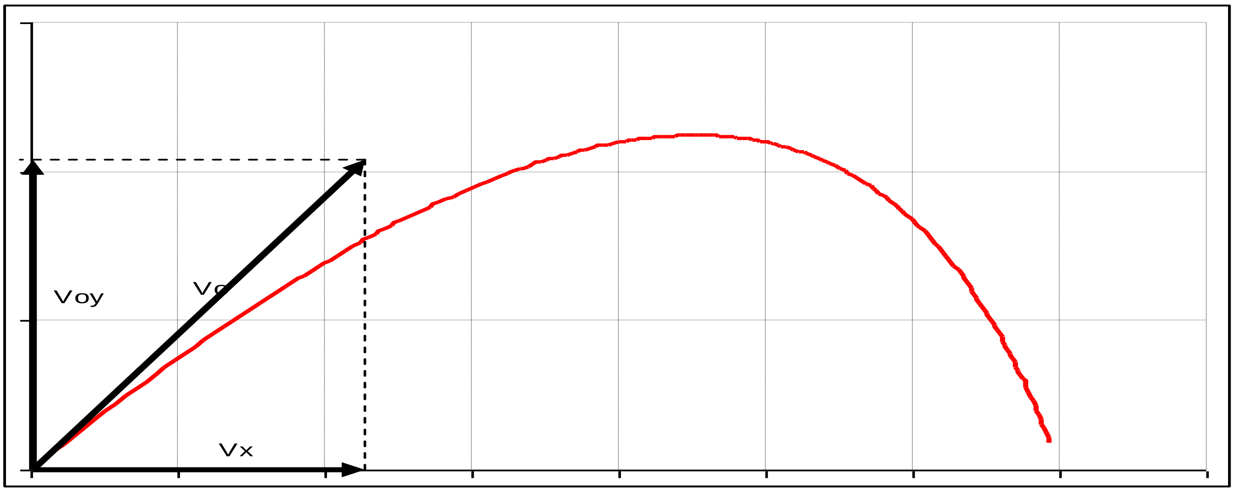
Jak wynika z wykresu, ruch w ośrodku z siłami oporu zależnymi od prędkości nie jest ruchem jednostajnie zmiennym. Ciało po pewnym czasie zacznie poruszać się ze stałą prędkością ruchem jednostajnym. Prędkość tą nazywamy prędkością graniczną.
Wartość prędkości granicznej zależy od współczynnika k, czyli od rodzaju ośrodka, kształtu ciała i przekroju czynnego.
Na bazie takich obliczeń można określić np. jaka duża musi być czasza spadochrony, by skoczek mógł spaść na ziemię bezpiecznie. Oczywiście brakuje tutaj informacji o bezpiecznej prędkości dla skoczka

4. *Krzywa balistyczna*

Ruch w poprzednim przykładzie odbywał się w jednym wymiarze.
Rozpatrzmy teraz ruch w dwóch wymiarach. Będzie to rzut ukośny z uwzględnieniem sił oporu.

Rzut ukośny jest omawiany w szkole, jako ruch bez sił oporu. Ten silnie uproszczony model, znacznie odbiega od sytuacji rzeczywistych.
Rozwiązanie problemu ruchu w dwóch wymiarach z siłami oporu w warunkach szkolnych jest możliwe przy zastosowaniu arkusza kalkulacyjnego.

a) Opis fizyczny



Rys 3. Krzywa balistyczna- rozkład prędkości

Opis ruchu w kierunku osi x
W kierunku osi X (poziom) na ciało działa tylko siła oporu powietrza

$$\vec{F} = -k\vec{v}_x \qquad [4.1]$$

Równie ruchu będzie miało postać

$$ma_x = -kv_x \qquad [4.2]$$

a postaci różniczkowej

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{k}{m}v_x = 0 \qquad [4.3]$$

Uwzględniając

$v_x = \dfrac{dx}{dt}$, otrzymujemy równanie na drogę wzdłuż osi x

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} = 0 \quad [4.4].$$

Jest to równanie różniczkowe II rzędu liniowe.
Rozwiązaniem równania jest funkcja *x(t)*

Opis ruchu w kierunku osi *y*
W kierunku osi y na ciało oprócz siły oporu działa siła ciężkości.

Równanie ruchu będzie miało postać

$$ma_y = mg + kv_y \quad [4.5]$$

w postaci różniczkowej ma postać

$$\frac{dv_y}{dt} - \frac{k}{m} v_y + g = 0 \qquad [4.6]$$

a po podstawieniu do równania zależności na prędkość otrzymamy równanie drogi wzdłuż osi y

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{k}{m}\frac{dv_y}{dt} + g = 0 \qquad [4.7]$$

Jest to podobnie jak w przypadku ruchu wzdłuż osi x równanie różniczkowe II rzędu liniowe. Z ostatniego równania może wyznaczyć zależność *y(t)* w naszym ruchu. Mając zależności *y(t)* i *x(t)* można narysować tor ruchu ciała rugując z obu równań parametr *t.*

Tor ruchu ciała można narysować rozwiązując oba równania numerycznie. Nie musimy w tym celu zaprzęgać analizy matematycznej. Rozwiązanie numeryczne należy przeprowadzić dla każdej z osi oddzielnie.

b) Model numeryczny

-Oś x

Ruch ciała będziemy rozpatrywali krok po kroku w odstępach czasowych *dt.*
W kolejności liczyć będziemy, najpierw przyspieszenie w odstępie czasowym *dt* (wprowadzając uproszczenie, że w tym czasie przyspieszenie jest stałe i wyznaczamy je z parametrów początkowych w przedziale). Następnie można już policzyć drogę przebytą przez ciało i prędkość na końcu przedziału.

Warunki początkowe:
Dla t=0
, x_0=0 , $v_{xo}=v_o cos(\alpha)$

przyspieszenie w pierwszym odstępie czasu *dt* wynosi

$$a_1 = -\frac{k}{m} v_{xo} \ .$$

Zmianę położenia w czasie *dt* obliczymy, traktując ruch jako ruch jednostajnie zmienny

$$x_1 = x_0 + v_0 dt + \frac{a_1 dt^2}{2}$$

Prędkość na końcu przedziału

$$v_{x1} = v_{xo} + a_1 dt \ .$$

W kolejnym kroku (drugi przedział czasu *dt*) liczymy na podstawie v_{x1} przyspieszenie a_2

$$a_{x2} = -\frac{k}{m} v_{x1} \ ,$$

a następnie położenie

$$x_2 = x_1 + v_{x1}dt + \frac{a_{x2}dt^2}{2}.$$

Ostatnim krokiem jest policzenie prędkości na końcu przedziału, która pozwoli nam obliczyć kolejne przyspieszenia i położenia

$$v_{x2} = v_{x1} + a_2 dt.$$

-Oś y

Obliczenia numeryczne dla osi y przeprowadzimy analogicznie jak dla osi x.

Warunki początkowe dla t=0, y_0=0,

$v_{oy}=v_o sin(\alpha)$

Liczymy kolejno przyspieszenie, położenie i prędkość

$$a_{y1} = g + \frac{k}{m}v_{y0} \qquad y_1 = y_0 + v_{y0}dt + \frac{a_{y1}dt^2}{2} \qquad v_{y1} = v_{y0} + a_{y1}dt$$

1. Po czasie *dt*

$$a_{y2} = g + \frac{k}{m}v_{y1} \qquad y_2 = y_1 + v_{y1}dt + \frac{a_{y2}dt^2}{2} \qquad v_{y2} = v_{y1} + a_{y2}dt$$

2. Po czasie *dt*

$$a_{y3} = g + \frac{k}{m}v_{y2} \qquad y_3 = y_2 + v_{y2}dt + \frac{a_{y3}dt^2}{2} \qquad v_{y3} = v_{y2} + a_{y3}dt$$

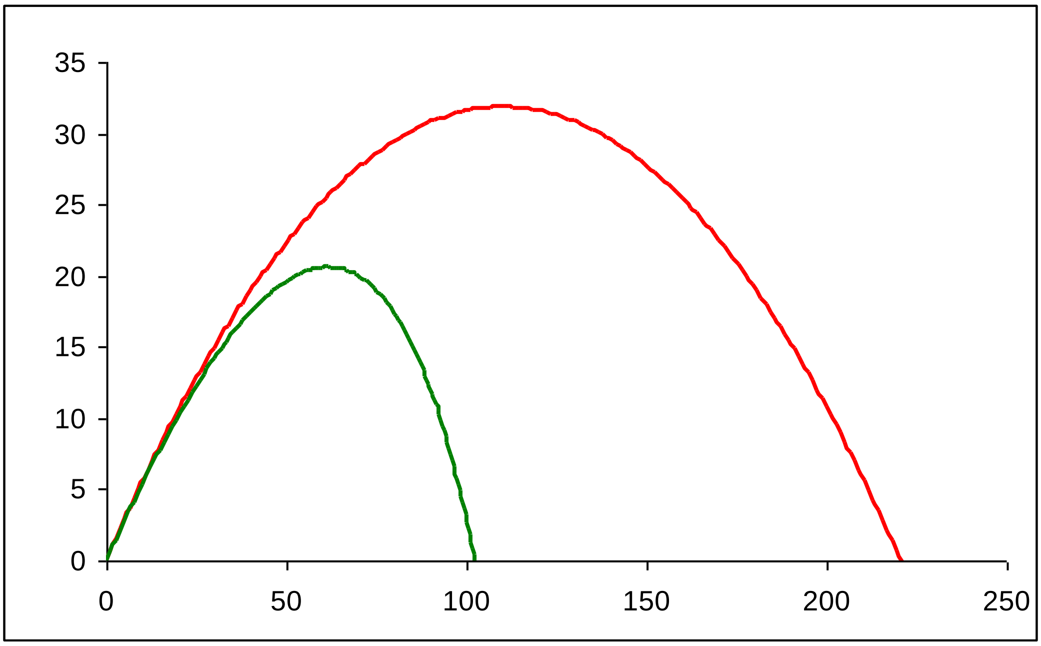
…

c) Konstrukcja arkusza

	A	B	C	D	E	F	G
1	Dane						
2	vo=	50	vx=	=B2*COS(RADIANY(B3))			
34	alfa=	40	voy=	=B2*SIN(RADIANY(B3))			
5	k=	0,3	k/m=	=B4/B5			
6	m=	1					
7	g=	9,81					
8	to=	0					
9	tk=	6					
10	n=	200					
11	dt=	=(B8-B7)/B9					
12							
13							
14	**t**	**Vx**	**ax**	**Vy**	**ay**	**sx**	**sy**
15	=B7	=B2	=$D$4*B14	=B3	=$B$6+$D$4*D14	0	0
16	=A14+$B$10	=B14-C14*$B$10	=$D$4*B15	=D14-E14*$B$10	=$B$6+$D$4*D15	=F14+B15*$B$10+C15*$B$10^2/2	=G14+D15*$B$10-E15*$B$10^2/2
17	=A15+$B$10	=B15-C15*$B$10	=$D$4*B16	=D15-E15*$B$10	=$B$6+$D$4*D16	=F15+B16*$B$10+C16*$B$10^2/2	=G15+D16*$B$10-E16*$B$10^2/2
18	=A16+$B$10	=B16-C16*$B$10	=$D$4*B17	=D16-E16*$B$10	=$B$6+$D$4*D17	=F16+B17*$B$10+C17*$B$10^2/2	=G16+D17*$B$10-E17*$B$10^2/2
19	=A17+$B$10	=B17-C17*$B$10	=$D$4*B18	=D17-E17*$B$10	=$B$6+$D$4*D18	=F17+B18*$B$10+C18*$B$10^2/2	=G17+D18*$B$10-E18*$B$10^2/2
20	=A18+$B$10	=B18-C18*$B$10	=$D$4*B19	=D18-E18*$B$10	=$B$6+$D$4*D19	=F18+B19*$B$10+C19*$B$10^2/2	=G18+D19*$B$10-E19*$B$10^2/2
21	=A19+$B$10	=B19-C19*$B$10	=$D$4*B20	=D19-E19*$B$10	=$B$6+$D$4*D20	=F19+B20*$B$10+C20*$B$10^2/2	=G19+D20*$B$10-E20*$B$10^2/2

Tab.4. Konstrukcja w arkuszu krzywej balistycznej.

Wykr.5 Porównanie krzywej balistycznej i krzywej rzutu ukośnego bez sił oporu



Na wykresie przedstawiono tor ruchu ciała bez sił oporu i krzywą balistyczną, odpowiadającą ruchowi rzeczywistemu. Okazuje się , że nawet bardzo mały współczynnik oporu k znacznie zmienia tor ruchu i zasięg rzutu.

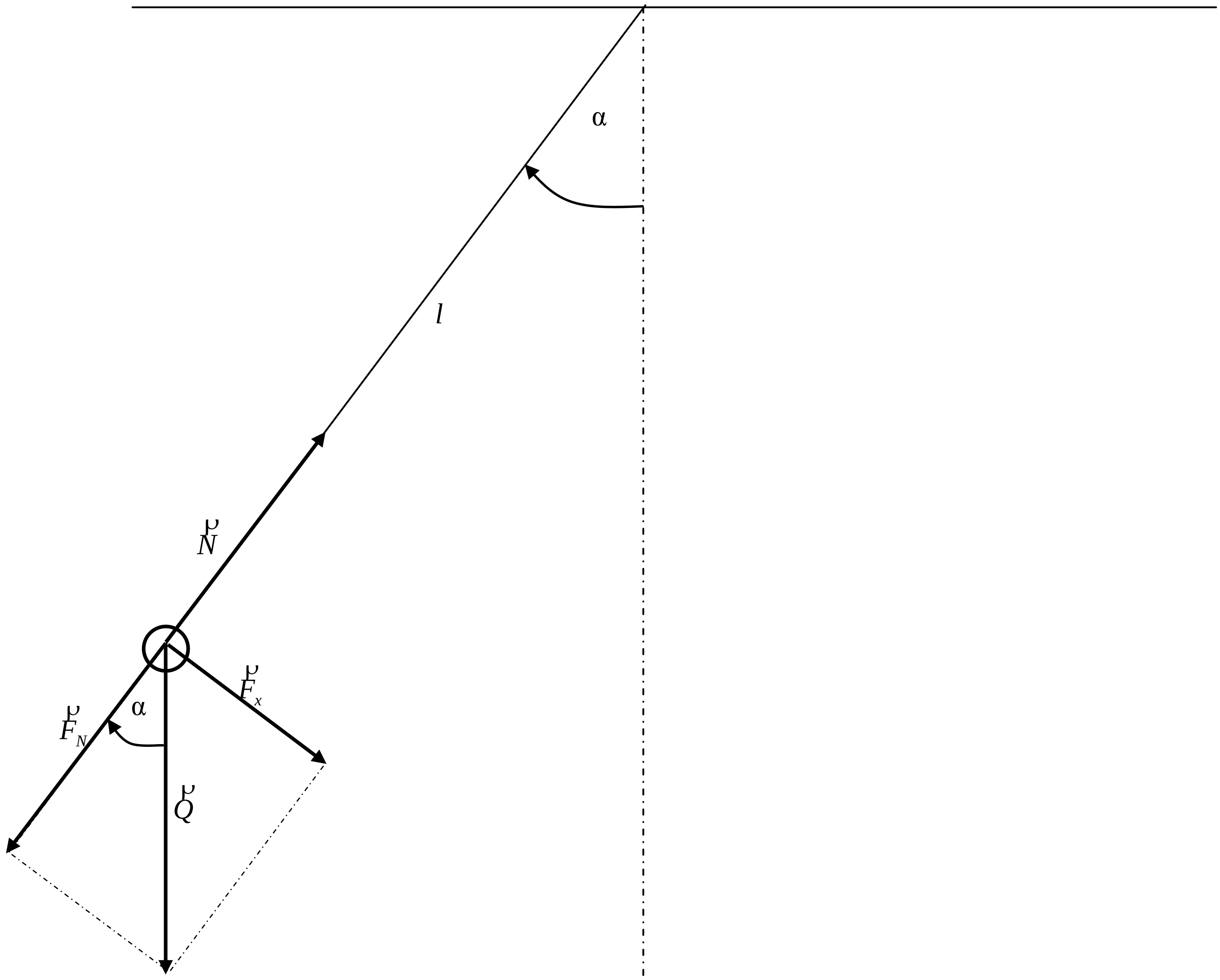
drgania tłumione –zależność wychylenia od czasu.

Znalezienie zależności v(t) będzie rozwiązaniem problemu.

Również od strony opisu ruchu zależność a(t) pokazuje rodzaj, klasyfikuje ruch.

5. *Wahadło matematyczne- drgania*

a) Opis fizyczny



Rys. 4 Wahadło fizyczne – rozkład sił

Na kulkę zawieszoną na nierościągliwej nici o długości *l* i masie *m* działa siła ciężkości *Q*
$\vec{Q} = m\vec{g}$ [5.1]

Siła ta rozkłada się na dwie siły składowe
$F_x = Q\sin(\alpha) = mg\sin(\alpha)$ [5.2],
oraz
$F_N = Q\cos(\alpha) = mg\cos(\alpha)$ [5.3]

Równanie ruchu ma postać

$ml\varepsilon = -F_x$ [5.4]

Gdzie ε – przyspieszenie kątowe

$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ [5.5]

Podstawiając [5.2] i [5.5] do [5.4] otrzymujemy nieliniowe równanie różniczkowe II rzędu.

$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\alpha) = 0$ [5.6]

Gdzie:

m - oznacza masę ciała zawieszonego na nierozciągliwej, nieważkiej nici,
l - długość nici,
g - wektor przyspieszenia ziemskiego,
α - kąt wychylenia nici od pionu,
t – czas.

Równanie [5.6] nie da się rozwiązać przy pomocy analizy matematycznej. Rozwiązanie jest możliwe jedynie przy uproszczeniu. Dla małych wychyleniach α, można przyjąć sin(α)≈α . Wówczas równanie [5.6] przyjmuje postać

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0 \qquad [5.7]$$

A jego rozwiązaniem jest funkcja

$$\alpha(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad [5.8]$$

Gdzie

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ -częstość kątowa,

φ – faza ruchu.

b) Opis matematyczny arkusza

Rozpatrywać będziemy równanie [5.6].

Wyrażenie

$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ określa przyspieszenie wahadła. A patrząc na prawą stronę wyrażenia, jest to szybkość zmian $\frac{d\alpha}{dt}$,czyli prędkości kątowej.

Wyrażenie $\frac{d\alpha}{dt}$ na wykresie a(t) jest w przedziale czasu dt nachyleniem wykresu kąta względem osi czasu.

Zatem $\frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) = \frac{d\ nachylenia}{dt} = -\frac{g}{l}\sin(\alpha)$

A zmiana nachylenia *d nachylenia* wynosi

$$d\ nachylenia = -\frac{g}{l}\sin(\alpha)dt$$

Znając zmianę nachylenia możemy policzyć spadek kąta dla odstępu dt. Całkowita zmiana kąta po n ruchach jest sumą wszystkich wcześniejszych spadków.

Czas	Kąt	Zmiana nachylenia w czasie *dt*	
0	α_o	$d\ nachylenia_0 = -\frac{g}{l}\sin(\alpha_0)dt * dt$	*SUMA₀=d nachynienia₀*
1*dt*	$\alpha_1 = \alpha_0 + SUMA_0$	$d\ nachylenia_1 = -\frac{g}{l}\sin(\alpha_1)dt * dt$	$SUMA_1 = SUMA_0 + d\ nachylenia_1$
2*dt*	$\alpha_2 = \alpha_1 + SUMA_1$	$d\ nachylenia_2 = -\frac{g}{l}\sin(\alpha_2)dt * dt$	...

c) Konstrukcja arkusza

	A	B	C	D
1	Dane:			
2	M=	1	omega2=	=B4/B3
3	l=	2		
4	g=	9,81		
5	To=	0		
6	Tk=	2,9		
7	alfa0=	=RADIANY(C7)	25	
8	n=	100		
9	Dt=	=(B6-B5)/B8		
10				
11				
12	T	alfa	zmiana nachylenia w dt	zmiana kąta
13	=B5	=B7	=-$D$2*SIN(B13)*$B$9^2	=C13
14	=A13+$B$9	=B13+D13	=-$D$2*SIN(B14)*$B$9^2	=D13+C14
15	=A14+$B$9	=B14+D14	=-$D$2*SIN(B15)*$B$9^2	=D14+C15
16	=A15+$B$9	=B15+D15	=-$D$2*SIN(B16)*$B$9^2	=D15+C16
17	=A16+$B$9	=B16+D16	=-$D$2*SIN(B17)*$B$9^2	=D16+C17
18	=A17+$B$9	=B17+D17	=-$D$2*SIN(B18)*$B$9^2	=D17+C18
19	=A18+$B$9	=B18+D18	=-$D$2*SIN(B19)*$B$9^2	=D18+C19
20	=A19+$B$9	=B19+D19	=-$D$2*SIN(B20)*$B$9^2	=D19+C20
21	=A20+$B$9	=B20+D20	=-$D$2*SIN(B21)*$B$9^2	=D20+C21

Tab. 5 Konstrukcja zależności arkusz $\alpha(t)$

Wykr.6 Wykres zależności kąta od czasu w ruchu drgającym